Exercice 1. Nous avons $\dim(V) = 5$ (c'est le degré de χ_f). Les valeurs propres sont 7 et -2.

Les multiplicités du polynôme caractéristiques nous informent qu'une forme de Jordan de f doit avoir 3 fois la valeur 7 et 2 fois la valeur -2 sur la diagonal.

Les multiplicités du polynôme minimal nous informent qu'il y a au moins un bloc de Jordan de taille 2 pour la valeur propre $\lambda = 7$ et que les autres blocs sont de taille < 2 (donc de taille 1) Pour la valeur propre $\lambda = -2$ tous les blocs sont de taille 1.

La seule forme normale de Jordan possible (à permutation des blocs près) est donc

$$J_2(7) \oplus J_1(7) \oplus J_1(-2) \oplus J_1(-2) = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Exercice 2.

a) On sait que les racines de μ_A sont exactement les valeurs propres de A donc le spectre de A est $\sigma(A) = \{0, 1, 2\}$.

b) Non. (Le polynôme minimal possède une racine double)

c) On commence par une remarque. On a

$$\begin{aligned} \mathrm{rang}(A) &= \dim(V) - \dim(\mathrm{Ker}(A)) \\ &= \dim(V) - \dim(E_0) \\ &= \dim(V) - s, \end{aligned}$$

où s est le nombre de blocs de Jordan pour la valeur propre 0. Comme $\dim(V) = 6$ et $\mathrm{rang}(A) = 4$, on en déduit que $s = 2$.

Soit α la transformation linéaire de $V = \mathbb{C}^6$ définie par A relativement à la base canonique. On décompose le polynôme minimal : $\mu_A = X(X-1)(X-2)^2$.

D'après le premier paragraphe, il existe exactement deux blocs de Jordan pour la valeur propre 0.

D'après le cours, la taille du plus grand bloc de Jordan pour une valeur propre λ est égal à la multiplicité de λ dans le polynôme minimal. Donc la taille du plus grand bloc de Jordan pour la valeur propre 0 (respectivement 1) est égale à 1, et celle pour 2 vaut 2. Donc il existe les blocs suivants : deux $J_1(0)$, au moins un $J_1(1)$ et au moins un $J_2(2)$.

Cependant, si on regarde la taille de A, $6 \neq 5 = 2 \times 1 + 1 \times 1 + 1 \times 2$, donc il existe encore un autre bloc de Jordan de taille 1×1, disons $J_1(\lambda)$. Il suffit de déterminer la valeur propre λ.

Cette valeur propre ne peut pas être 0, car sinon, on aurait trois blocs pour la valeur propre zéro.

Si $\lambda = 1$, alors la forme canonique de Jordan de A est

$$J_1(0) \oplus J_1(0) \oplus J_1(1) \oplus J_1(1) \oplus J_2(2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Si $\lambda = 2$, alors les blocs de Jordan de A sont

$$J_1(0) \oplus J_1(0) \oplus J_1(1) \oplus J_1(2) \oplus J_2(2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Maintenant on détermine les multiplicités géométriques des valeurs propres de A. On sait que le nombre de blocs de Jordan pour une valeur propre λ est la mutiplicité géométrique de cette valeur propre (Xhéorème de Jordan 9.5.2 et 9.6.1).

Dans le premier cas, $\mathrm{multgeom}(0) = 2, \mathrm{multgeom}(1) = 2$ et $\mathrm{multgeom}(2) = 1$; dans le deuxième cas, $\mathrm{multgeom}(0) = 2, \mathrm{multgeom}(1) = 1$ et $\mathrm{multgeom}(2) = 2$.

Exercice 3. On calcule que

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi B est nilpotente d'ordre 3, la seule valeur propre est $\lambda = 0$, le rang de B est 2 et le rang de B^2 est 1. On voit aussi que le polynôme minimal est $\mu_B = X^3$ et le polynôme caractéristique est $\chi_B = X^4$. On déduit de ce qui précède que la forme normale de Jordan est

$$J[B] = J_3(0) \oplus J_1(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Cherchons une base de Jordan, elle contient un cycle de longueur 3 et un cycle de longueur 1

1. Pour construire le cycle de longueur 3, on cherche un vecteur $X_3 \in \mathrm{Ker}(B^3)$ qui n'appartient pas $\mathrm{Ker}(B^2)$. On peut prendre $X_3 = (0,0,1,0)$ et on a alors

$$X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = BX_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad X_1 = BX_2 = B^2X_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   Observons que X_1 est un vecteur propre de B (pour $\lambda = 0$, donc un élément du noyau de B).
2. Pour construire le cycle de longueur 1 on cherche un autre vecteur propre (i.e. un élément du noyau) Y_1 qui soit linéairement indépendant de X_1. On peut prendre $Y_1 = (0,2,0,-1)$.

On a donc trouvé notre base de Jordan $\{X_1, X_2, X_3, Y_1\}$. On pose alors

$$Q = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

et on vérifie que $Q^{-1}BQ = J[B]$ (ou si on préfère $BQ = J[B]Q$).

Exercice 4. En examinant le tableau, on voit par exemple que

$$\dim(\mathrm{Ker}(M - 7i\,\mathrm{I}_9)^3) + \dim(\mathrm{Ker}(M + \sqrt{3}\,\mathrm{I}_9)^2 = 5 + 4 = 9,$$

donc

$$\mathrm{Ker}(M - 7i\,\mathrm{I}_9)^3 \oplus \mathrm{Ker}(M + \sqrt{3}\,\mathrm{I}_9)^2 = \mathbb{K}^9$$

En effet le lemme des noyaux nous dit que $\mathrm{Ker}(M - 7i\,\mathrm{I}_9)^3 \cap \mathrm{Ker}(M + \sqrt{3}\mathrm{I}_9)^2 = \{0\}$, donc on a bien une somme directe et additivité des dimensions. La décomposition ci-dessous est donc la décomposition primaire de l'espace $\mathbb{K}^9$ pour la matrice M. En particulier :

1. Il n'y a pas d'autre valeur propre, le spectre de la matrice est $\sigma(M) = \{-\sqrt{3}, 7i\}$.
2. L'espace caractéristique pour la valeur propre $7i$ est $N_{7i} = \mathrm{Ker}(M - 7i\,\mathrm{I}_9)^3$ et sa dimension est 5.
3. L'espace caractéristique pour la valeur propre $-\sqrt{3}$ est $N_{-\sqrt{3}} = \mathrm{Ker}(M + \sqrt{3}\mathrm{I}_9)^2$ et sa dimension est 4.
4. Le polynôme caractéristique est donc $\chi_M(X) = (X - 7i)^5(X + \sqrt{3})^4$.

5. Le polynôme minimal est $\mu_M(X) = (X-7i)^3(X+\sqrt{3})^2$ car on a d'après le théorème de décomposition primaire

$$\mathrm{Ker}[(M-7i\,\mathrm{I}_9)^3(M+\sqrt{3}\,\mathrm{I}_9)^2] = \mathrm{Ker}(M-7i\mathrm{I}_9)^3 \oplus \mathrm{Ker}(M+\sqrt{3}\,\mathrm{I}_9)^2 = K^9,$$

ce qui signifie que $(M-7i\,\mathrm{I}_9)^3(M+\sqrt{3}\,\mathrm{I}_9)^2 = 0$, et d'autre part $\dim\mathrm{Ker}[(M-7i\,\mathrm{I}_9)^{k_1}(M+\sqrt{3}\,\mathrm{I}_9)^{k_2}] < 9$ si $k_1 < 3$ ou $k_2 < 2$.

Les multiplicités géométriques des deux valeurs propres se lisent aussi dans le tableau, elles valent $\delta_5(7i) = \delta_{-\sqrt{3}}(1) = 2$, il y a donc deux blocs de Jordan pour chaque valeurs propres et on sait qu'il y a au moins un bloc de Jordan de taille 3 pour la valeur propre $\lambda = 5$. On déduit alors que la forme normale de Jordan de M est

$$J[M] = J_3(7i) \oplus J_2(7i) \oplus J_2\left(-\sqrt{3}\right) \oplus J_2\left(-\sqrt{3}\right).$$

Variante : On peut aussi directement calculer les nombres de blocs de Jordan de taille k pour la valeur propre λ (on note ce nombre par $\alpha_\lambda(k)$) par la formule vue au cours :

$$\alpha_\lambda(k) = 2\delta_\lambda(k) - \delta_\lambda(k+1) - \delta_\lambda(k-1)$$

(on pose $\delta_\lambda(0) = 0$ dans cette formule). Avec le tableau de Théodule cela nous donne pour la valeur propre $\lambda = 7i$,

$$\alpha_{7i}(1) = 2\times2-4 = 0,\ \alpha_{7i}(2) = 2\times4-5-2 = 1,\ \alpha_{7i}(3) = 2\times5-5-4 = 1,\ \alpha_{7i}(4) = \alpha_{7i}(5) = 0,$$

et pour la valeur propre $\lambda = -\sqrt{3}$,

$$\alpha_{-\sqrt{3}}(1) = 2\times2-4 = 0,\ \alpha_{-\sqrt{3}}(2) = 2\times4-4-2 = 2,\quad \alpha_{-\sqrt{3}}(3) = \alpha_{-\sqrt{3}}(4) = \alpha_{-\sqrt{3}}(5) = 0.$$

A partir de ces valeur on écrit directement la forme normale de Jordan $J[M] = J_2(5) \oplus J_3(5) \oplus J_2(-2) \oplus J_2(-2)$, et cette forme de Jordan nous permet d'écrire les polynômes minimal et caractéristique.

On observe que les multiplicités généralisées $\delta_\lambda(k)$ généralisent les multiplicités géométriques et que ces nombres codent toute l'information déterminant la structure de l'endomorphisme associé à la matrice considérée. On exprime cela en disant que la famille des suites $\{\delta_\lambda(k)\}_{\lambda\in\sigma(A),k\in\mathbb{N}}$ forme un *système complet d'invariants de similitude pour la matrice A*

Exercice 5. (a) L'affirmation (a) découle immédiatement du théorème de réduction de Jordan car tout polynôme sur le corps des complexes est scindé.

On peut aussi raisonner directement : si $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$ est diagonalisable, nous n'avons rien à prouver. On suppose donc que A n'est pas diagonalisable. En particulier la matrice A possède exactement une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ et cette valeur propre est de multiplicité géométrique 1 (il existe au moins une valeur propre car $\chi_A(X)$ est un polynôme complexe, d'autre part s'il existait deux valeurs propres distinctes, alors A serait diagonalisable, donc cette valeur propre est unique, finalement si la multiplicité géométrique de cette valeur propre était 2, alors de nouveau A serait diagonalisable).

On a donc $\dim(E_\lambda(A)) = 1$ et on peut donc trouver un vecteur $w \in \mathbb{C}^2 \setminus E_\lambda(A)$. Notons $v = (f - \lambda \mathrm{I}_2)(w)$ l'image de ce vecteur par $(f - \lambda \mathrm{I}_2)$. Par construction on a

$$f(v) = \lambda v, \quad f(w) = \lambda w + v.$$

Ces vecteurs sont linéairement indépendants (car $w \notin E_\lambda)$) et donc il forment une base de $\mathbb{C}^2$. Dans cette base la matrice de l'endomorphisme s'écrit $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Cet argument un cas simple illustrant le principe de la preuve du théorème de réduction de Jordan (les vecteurs v, w forment un cycle de longueur 2 et donc la base $\{v, w\}$ est une base de Jordan).

(b) Supposons que $A \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ possède une ou deux valeurs propres réelles. Alors on montre comme dans le cas précédent que A est ou bien diagonalisable, ou bien semblable à la matrice J. Le cas qui reste à étudier est celui où A ne possède aucune valeur propre réelle. Mais dans ce cas, le polynôme caractéristique $\chi_A(X)$ possède deux racines complexes conjuguées, $\lambda = \alpha + i\,\beta$ et $\overline{\lambda} = \alpha - i\,\beta$. En particulier il existe un vecteur propre complexe

$$v = v_1 + i\,v_2 \in \mathbb{C}^2, \quad \text{tel que} \quad Av = (\alpha - i\,\beta)v, \quad \text{avec} \quad v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2.$$

En séparant les parties réelles et imaginaires, on trouve que

$$Av_1 = \alpha\,v_1 + \beta\,v_2, \qquad Av_2 = -\beta\,v_1 + \alpha\,v_2.$$

Nous affirmons que v_1 et v_2 sont linéairement indépendants par rapport au corps $\mathbb{R}$. Supposons en effet que (par exemple) $v_1 \neq 0$ et $v_2 = \rho\,v_1$ avec $\rho \in \mathbb{R}$. Alors

$$Av_1 = \alpha\,v_1 + \beta\,v_2 = \lambda\,v_1, \quad \text{avec } \lambda = (\alpha + \rho\,\beta) \in \mathbb{R},$$

ce qui est impossible puisqu'on a supposé que la matrice A n'a pas de valeur propre réelle. On a montré que $\{v_1, v_2\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et dans cette base, la matrice de l'endomorphisme A devient la matrice $K(\alpha, \beta)$. Par conséquent les matrices A et K sont semblables.

Exercice 6. a) Non. Par exemple, $(1,0,\cdots,0)$ (respectivement $(0,1,0,\cdots,0)$) est envoyé vers 1 (respectivement 0), mais $(1,0,\cdots,0)+(0,1,0,\cdots,0)=(1,1,0,\cdots,0)$ est envoyé vers $0\neq 1+0$.

b) Non. Notons α l'application en question. Par exemple $\alpha(2\cdot(1,0,0))=\alpha(2,0,0)=11$, mais
$$2\cdot\alpha(1,0,0)=2\cdot 6=12\neq 11=\alpha(2\cdot(1,0,0)).$$

c) Non. Notons α l'application en question et considérons un polynôme $p(x)$ tel que $p(a)\neq 0$, alors
$$2\,\alpha(P)=2\,P(a)^2\neq 4\,P(a)^2=\alpha(2\cdot P).$$

d) Oui, car dans le corps $\mathbb{F}_2$ on a $P(a)^2=P(a)$, donc l'application en question est l'évaluation en a, qui est une forme linéaire.

e) Oui, car l'application $P\mapsto P(a^2)$ est l'évaluation du polynôme au point $a^2\in\vec{Q}$ et c'est donc une forme linéaire (c'est la forme linéaire δ_{a^2}).

f) Oui, car c'est la somme de deux formes linéaires : l'intégration + l'évaluation en 1.

g) L'application det : $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ est une forme linéaire si et seulement si $n=1$

Exercice 7. Nous proposons deux méthodes pour résoudre ce problème. La première utilise le fait, vu au cours, que si P est la matrice de transition de la base canonique $\{e_i\}$ vers la base $\{v_i\}$, alors la matrice de transition de la base canonique duale $\{\varepsilon_i\}$ vers la base duale de $\{v_i\}$ est la matrice contragrédiente $(P^{-1})^{\top}$.

Nous avons ici
$$P=\begin{pmatrix}3&2\\2&3\end{pmatrix}\qquad\text{donc}\qquad (P^{-1})^{\top}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3&-2\\-2&3\end{pmatrix}.$$
La base duale $\{\varphi_1,\varphi_2\}\subset(\mathbb{K}^2)^*$ cherchée est donc donnée par
$$\varphi_1=\frac{1}{5}(3\,\varepsilon_1-2\,\varepsilon_2),\qquad \varphi_2=\frac{1}{5}(-2\,\varepsilon_1+3\,\varepsilon_2),$$
où on a noté $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ la base duale de la base canonique $\{e_1,e_2\}$ de $\mathbb{K}^2$. Cela signifie que
$$\varphi_1(x_1,x_2)=\frac{1}{5}(3x_1-2x_2)\qquad \varphi_2(x_1,x_2)=\frac{1}{5}(-2x_1+3x_2).$$

Autre méthode : on cherche la base duale $\{\varphi_1,\varphi_2\}\subset(\mathbb{K}^2)^*$ en posant
$$\varphi_1(x,y)=ax+by,\qquad \varphi_2(x,y)=cx+dy.$$
Les coefficients a,b,c,d sont déterminés par les relations de dualité :

$\varphi_1(3,2)=3a+2b=1,\ \varphi_1(2,3)=2a+3b=0,\quad \varphi_2(3,2)=3c+2d=0,\ \varphi_2(2,3)=2c+3d=1,$

c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a donc $a = \frac{3}{5}, b = -\frac{2}{5}$ et $c = -\frac{2}{5}, d = -\frac{2}{5}$. Par conséquent on a

$$\varphi_1(x,y) = \frac{1}{5}(3\,x - 2\,y) \qquad \varphi_2(x,y) = \frac{1}{5}(-2\,x + 3\,y).$$

Exercice 8. (a) Notons $\sim$ la relation de congruence et montrons que c'est une relation d'équivalence. Il est clair que pour toute matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ on a $A \sim A$ (il suffit de choisir $P = \mathrm{I}_n$).

Pour prouver la symétrie, i.e. $B \sim A \Rightarrow A \sim B$, on utilise que $(P^{-1})^\top = (P^\top)^{-1}$. Donc s'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que $B = P^\top AP$, alors

$$A = (P^\top)^{-1}BP^{-1} = (P^{-1})^\top BP^{-1}.$$

Il reste à prouver la transitivité, i.e. si $A \sim B$ et $B \sim C$, alors $A \sim C$. Pour cela on raisonne comme suit : on suppose qu'il existe $P, Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tels que $B = P^\top AP$ et $C = Q^\top BQ$, alors

$$C = Q^\top BQ = C = Q^\top(P^\top AP)Q = (Q^\top P^\top)A(PQ) = (PQ)^\top A(PQ),$$

ce qui implique que C est congruente à A.

(b) Si les matrices sont à coefficients dans un corps K de caractéristique 2, alors B est la matrice nulle et les deux matrices ne sont pas congruentes. Si le corps K est de caractéristique $\neq 2$ (i.e. $1 + 1 \neq 2$), alors les matrices A et B sont congruentes.

On peut par exemple prendre la matrice de transition $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, qui nous donne $B = P^\top AP$.

(c) Les matrices C et D sont congruentes sur le corps $\mathbb{C}$ et elles ne sont pas congruentes sur le corps $\mathbb{R}$. Pour le voir, examinons à quelles conditions les matrices C et D sont congruentes ; pour cela il faut trouver une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ telle que $P^\top CP = D$. Notons $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une telle matrice, alors on doit avoir

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = D = P^\top CP = P^\top P = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire

$$a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = -1 \quad \textbf{et} \quad ad + bc = 0.$$

Les deux matrices sont donc congruentes si et seulement si on peut résoudre ces équations dans le corps K. C'est clairement impossible si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et c'est possible si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (on peut prendre la matrice de passage $P = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$ avec $i^2 = -1$).

(Les matrices C et D sont également congruentes dans le corps à deux éléments $\mathbb{F}_2$ car dans ce cas $C = D$).

(d) La réponse est négative. Par exemple les matrices A et B de la question (b) sont congruentes mais non semblables (par exemple parce qu'elles n'ont pas les mêmes déterminants, ou simplement parce que la seule matrice semblable à l'identité est l'identité).

Exercice 9. a) Comme $0 \neq \varphi$, il existe un vecteur $v \in V$ tel que $\varphi(v) = \alpha \neq 0$, ce qui montre que tout tout $t \in \mathbb{K}$, on a $\varphi(\alpha^{-1}tv) = t$, ce qui implique que φ est surjective. Le théorème du rang donne

$$\dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = \dim(V) - \dim(\mathrm{Im}\,(\varphi)) = n - 1.$$

b) Il s'agit d'un raisonnement en analyse-synthèse. En effet, si on cherche une décomposition sous la forme $v = v' + a\,u$, on obtient $f(v) = f(v') + a\,f(u) = a\,f(u)$, ce qui donne $a = \dfrac{f(v)}{f(u)}$. De plus, avec cette valeur de a, on obtient

$$f(v - a\,u) = f(v) - \frac{f(v)}{f(u)}f(u) = 0,$$

et l'unicité de la décomposition découle de l'étape précédente.

c) Si $\mathrm{Ker}(\varphi_1) = \mathrm{Ker}(\varphi_2) = V$, il n'y a rien à prouver. On peut donc supposer que φ_1 et φ_2 sont non identiquement nulles. Fixons $u \notin \mathrm{Ker}(\varphi_1) \cup \mathrm{Ker}(\varphi_2)$ (qui existe car $\mathrm{Ker}(\varphi_1) = \mathrm{Ker}(\varphi_2)$). La question précédente montre que pour tout $v \in V$, il existe $v' \in \mathrm{Ker}(\varphi_1)$ et $v'' \in \mathrm{Ker}(\varphi_2)$ tels que

$$v = v' + \frac{\varphi_1(v)}{\varphi_1(u)}u = v'' + \frac{\varphi_2(v)}{\varphi_2(u)}u.$$

Par conséquent, on a $v' - v'' \in \mathrm{Ker}(\varphi_1) \cap \mathrm{Ker}(\varphi_2)$, ce qui donne en particulier

$$\varphi_1(v' - v'') = 0.$$

Or, on a

$$v' - v'' = \frac{\varphi_1(v)\varphi_2(u) - \varphi_2(u)\varphi_1(u)}{\varphi_1(u)\varphi_2(u)}u,$$

et comme $u \notin \mathrm{Ker}(\varphi_1)$, ceci implique que pour tout $v \in V$, on a

$$0 = \varphi_1(v)\varphi_2(u) - \varphi_2(u)\varphi_1(u) = \det \begin{pmatrix} \varphi_1(v) & \varphi_2(v) \\ \varphi_1(u) & \varphi_2(u) \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Par conséquent, pour tout $v \in V$, il existe $\lambda(v) \in \mathbb{K}^*$ (car $\varphi_1(u)\varphi_2(u) \neq 0$) tel que

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(v) \\ \varphi_1(u) \end{pmatrix} = \lambda(v) \begin{pmatrix} \varphi_2(v) \\ \varphi_2(u) \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, on obtient $\lambda(v) = \dfrac{\varphi_1(u)}{\varphi_2(u)}$ qui est constant, et le résultat s'ensuit (bien entendu, on pouvait résoudre l'équation directement à l'aide de (1), mais il est parfois intéressant de raisonner de manière plus algébrique).